

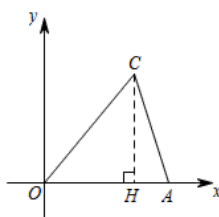
第2讲 一次函数与面积综合

一、面积之“底高公式”

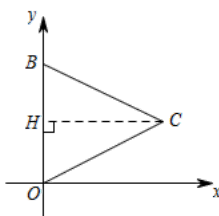
|| 三角形的底在坐标轴上

三角形的底在坐标轴上时，利用点到坐标轴的距离求出高后直接求面积即可。

① 如图 $S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot |x_A| \cdot |y_C|$,



② 如图 $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot |y_B| \cdot |x_C|$.

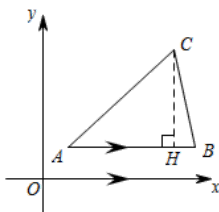


注意：点到坐标轴的距离要带 绝对值 。

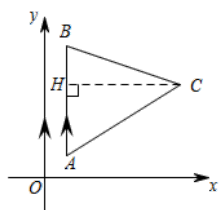
|| 三角形的底平行于坐标轴

三角形的底平行于坐标轴时，利用平行于坐标轴的直线上的两点间距离求出底和高，最后用面积公式求出面积即可。

① 如图 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot |x_B - x_A| \cdot |y_C - y_H|$,

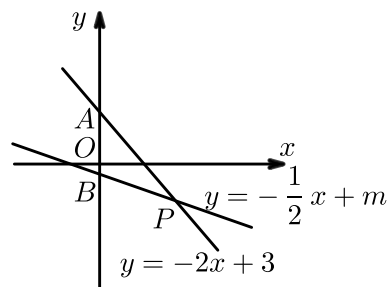


② 如图 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot |y_B - y_A| \cdot |x_C - x_H|$.



|| 例题1

1. 如图, 函数 $y = -2x + 3$ 与 $y = -\frac{1}{2}x + m$ 的图象交于 $P(n, -2)$.



- (1) 求出 m 、 n 的值.
 (2) 直接写出不等式 $-\frac{1}{2}x + m > -2x + 3$ 的解集.
 (3) 求出 $\triangle ABP$ 的面积.

【答案】 (1) $m = -\frac{3}{4}$, $n = \frac{5}{2}$.

(2) $x > \frac{5}{2}$.

(3) $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{75}{16}$.

【解析】 (1) $\because y = -2x + 3$ 过点 $P(n, -2)$.

$$\therefore -2 = -2n + 3,$$

$$\text{解得: } n = \frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, -2\right),$$

$$\because y = -\frac{1}{2}x + m \text{ 的图象过点 } P\left(\frac{5}{2}, -2\right).$$

$$\therefore -2 = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + m,$$

$$\text{解得: } m = -\frac{3}{4}.$$

(2) 根据函数图象可知, 不等式 $-\frac{1}{2}x + m > -2x + 3$ 的解集为 $x > \frac{5}{2}$.

(3) $\because$ 在 $y = -2x + 3$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$$\therefore A(0, 3),$$

$$\because \text{在 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \text{ 中, 当 } x = 0 \text{ 时, } y = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{3}{4}\right),$$

$$\therefore AB = 3\frac{3}{4};$$

$$\therefore \triangle ABP \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}AB \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{75}{16}.$$

【标注】【知识点】一次函数与面积

练习1

2.

在平面直角坐标系中，点 O 是坐标原点，过点 $A(1,2)$ 的直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于点 B ，且 $S_{\triangle AOB}=4$ ，则 k 的值是_____。

【答案】 $\frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{3}$

【解析】 把 $y=0$ 代入 $y=kx+b$ 得 $kx+b=0$ ，解得 $x=-\frac{b}{k}$ ，所以 B 点坐标为 $(-\frac{b}{k}, 0)$ 。

把 $A(1,2)$ 代入 $y=kx+b$ 得 $k+b=2$ ，则 $b=2-k$ ，

$\therefore S_{\triangle AOB}=4$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \left| -\frac{b}{k} \right| \cdot 2 = 4$ ，即 $\left| \frac{b}{k} \right| = 4$ ，

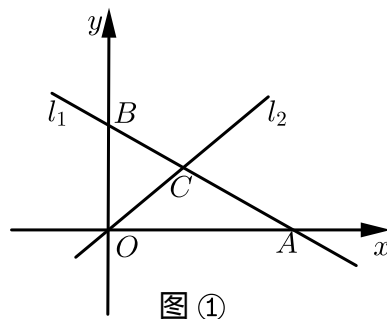
$\therefore \left| \frac{2-k}{k} \right| = 4$ ，

解得 $k = \frac{2}{5}$ 或 $-\frac{2}{3}$ 。

【标注】 【知识点】公式法求面积

3. 在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 4$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、点 B ，且与直线 $l_2: y = x$ 于点 C 。

(1) 如图①，求出 B 、 C 两点的坐标。



(2) 若 D 是线段 OC 上的点，且 $\triangle BOD$ 的面积为4，求直线 BD 的函数解析式。

【答案】 (1) $B(0,4)$ ， $C(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ 。

(2) $y = -x + 4$ 。

【解析】 (1) 对于直线 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ，令 $x=0$ ，得到 $y=4$ ，

$\therefore B(0,4)$ ，

由 $\begin{cases} y=x \\ y=-\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$ ，

$\therefore C(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$ 。

(2) $\because$ 点 D 在直线 $y=x$ 上，设 $D(m, m)$ ，

$\therefore \triangle BOD$ 的面积为4，

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times m = 4 ,$$

$$\text{解得 } m = 2 ,$$

$$\therefore D(2, 2) .$$

$$\text{设直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = kx + b , \text{ 则有 } \begin{cases} b = 4 \\ 2k + b = 2 \end{cases} ,$$

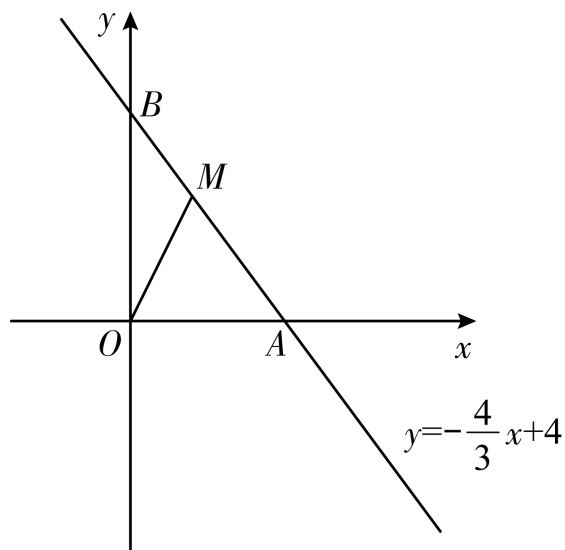
$$\text{解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases} ,$$

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = -x + 4 .$$

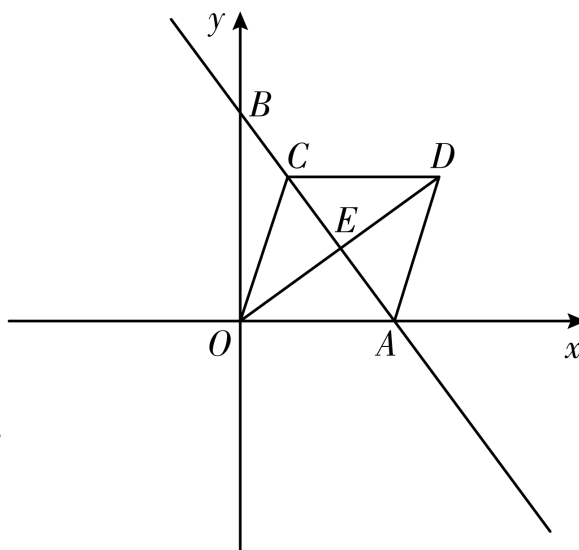
【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

例题2

4. 如图，在平面直角坐标系中， O 为原点，已知直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B 。



图①



图②

- (1) 点 A 的坐标为 _____，点 B 的坐标为 _____。
- (2) 如图①，若点 $M(x, y)$ 在线段 AB 上运动(不与端点 A 、 B 重合)，连接 OM ，设 $\triangle AOM$ 的面积为 S ，写出 S 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围。
- (3) 如图②，若四边形 $OADC$ 是菱形，求菱形对角线 OD 的长。

【答案】(1) $(3, 0)$ ， $(0, 4)$

$$(2) S = -2x + 6 (0 < x < 3) .$$

$$(3) \frac{24}{5} .$$

【解析】(1) 解： $\because$ 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，

$$\therefore \text{令 } y = 0 , \text{ 得 } x = 3 ; \text{ 令 } x = 0 , \text{ 得 } y = 4 ,$$

$$\therefore A(3, 0) , B(0, 4) .$$

故答案为：(3,0) , (0,4) .

(2) 解：∵点 $M(x,y)$ 在直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 上，

$$\therefore M\left(x, -\frac{4}{3}x + 4\right).$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}AO \cdot y_M = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(-\frac{4}{3}x + 4\right) = -2x + 6 (0 < x < 3).$$

(3) 解：由(1)得， $OA = 3$ ， $OB = 4$.

$$\therefore \text{在Rt}\triangle AOB \text{中}, AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

∵四边形 $OADC$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp OD, OE = \frac{1}{2}OD.$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \times OB = \frac{1}{2}AB \times OE.$$

$$\therefore \frac{1}{2}AB \times OE = \frac{1}{2}OA \times OB,$$

$$\therefore 5OE = 3 \times 4,$$

$$\therefore OE = \frac{12}{5}.$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OD,$$

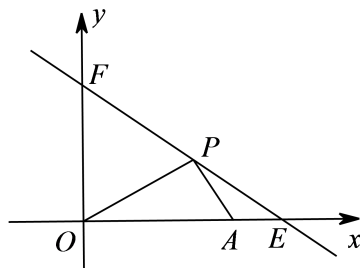
$$\therefore OD = 2OE = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}.$$

$$\therefore \text{菱形的对角线}OD\text{的长为}\frac{24}{5}.$$

【标注】【知识点】一次函数与面积

练习2

5. 已知：如图，直线 $y = kx + 6$ 与 x 轴 y 轴分别交于点 E ， F . 点 E 的坐标为(8,0)，点 A 的坐标为(6,0) .



(1) 求 k 的值 .

(2) 若点 $P(x,y)$ 是第一象限内的直线 $y = kx + 6$ 上的一个动点，当点 P 运动过程中，试写出 $\triangle OPA$ 的面积 S 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围 .

(3) 探究：当 P 运动到什么位置时， $\triangle OPA$ 的面积为9，并说明理由 .

【答案】(1) $k = -\frac{3}{4}$.

(2) $S = -\frac{9}{4}x + 18 (0 < x < 8)$.

(3) 当 P 运动到点(4,3)，(12,-3)这两个位置时， $\triangle OPA$ 的面积为9 .

【解析】(1) 把点 $E(8,0)$ 代入 $y=kx+6$,

$$\text{得 } 8k+6=0, \text{ 解得: } k=-\frac{3}{4}.$$

(2) $\because$ 点 $P(x,y)$ 在第一象限内的直线 $y=-\frac{3}{4}x+6$ 上

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (x, -\frac{3}{4}x+6) \text{ 且 } x>0, -\frac{3}{4}x+6>0,$$

$$\text{过点 } P \text{ 作 } PD \perp x \text{ 轴于点 } D, \text{ 则 } \triangle OPA \text{ 的面积} = \frac{1}{2}OA \times PD,$$

$$\text{即 } S = \frac{1}{2} \times 6 \times (-\frac{3}{4}x+6),$$

$$\therefore S = -\frac{9}{4}x + 18 \quad (0 < x < 8).$$

(3) 由 $S=9$ 得, $-\frac{9}{4}x+18=9$, 解得 $x=4$,

$$\text{把 } x=4 \text{ 代入 } y=-\frac{3}{4}x+6, \text{ 得 } y=-\frac{3}{4} \times 4+6=3,$$

这时, P 有坐标为 $(4,3)$,

$$\text{又 } \because S = \frac{1}{2}OA \times |y_P|, OA=6,$$

$$\therefore |y_P|=3,$$

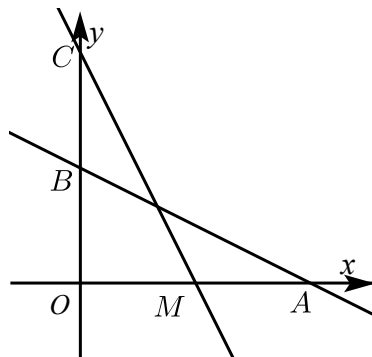
$$\therefore |y_P|=-3 \text{ 时, } x=12,$$

这时, P 有坐标为 $(12,-3)$,

即当 P 运动到点 $(4,3)$, $(12,-3)$ 这两个位置时, $\triangle OPA$ 的面积为9.

【标注】【知识点】一次函数与动点问题

6. 如图, 直线 l : 与 x 轴、 y 轴分别交于 $A(4,0)$, $B(0,2)$ 两点, 在 y 轴上有一点 $C(0,4)$, 动点 M 从 A 点以每秒1个单位的速度沿 x 轴向左移动.



(1) 求直线 l 的解析式.

(2) 求 $\triangle COM$ 的面积 S 与点 M 的移动时间 t 之间的函数关系式.

(3) 当 t 何值时 $\triangle COM \cong \triangle AOB$, 并求此时 M 点的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

$$(2) S = \begin{cases} 8-2t & (0 \leq t < 4) \\ 2t-8 & (t > 4) \end{cases}.$$

(3) ①当 $M(2,0)$ 时, $AM = OA - OM = 4 - 2 = 2$, 即 M 运动了2秒;

②当 $(-2, 0)$ 时, $AM = OA + OM = 4 - (-2) = 6$, 即 M 运动了6秒;

综上所述: $t = 2$ 或6

【解析】(1) 设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$, 由直线 l : 与 x 轴、 y 轴分别交于 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ 两点,

$$\text{得} \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

直线 l 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

(2) 由动点 M 从 A 点以每秒1个单位的速度沿 x 轴向左移动, t 秒运动了 t 个单位, 即

$$AM = t.$$

①当 $0 \leq t < 4$ 时, 由线段的和差得 $OM = 4 - t$,

$\triangle COM$ 的面积 S 与 M 的移动时间 t 之间的函数关系式

$$S = \frac{1}{2} OM \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4(4 - t) = 8 - 2t.$$

②当 $t > 4$ 时, 由线段的和差得 $OM = t - 4$,

$\triangle COM$ 的面积 S 与 M 的移动时间 t 之间的函数关系式

$$S = \frac{1}{2} OM \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4(t - 4) = 2t - 8.$$

$$\text{综上所述: } S = \begin{cases} 8 - 2t (0 \leq t < 4) \\ 2t - 8 (t > 4) \end{cases}.$$

(3) 由 $\triangle COM \cong \triangle AOB$, 得 $OM = OB = 2$, 即 $M(2, 0)$ 或 $(-2, 0)$.

①当 $M(2, 0)$ 时, $AM = OA - OM = 4 - 2 = 2$, 即 M 运动了2秒;

②当 $(-2, 0)$ 时, $AM = OA + OM = 4 - (-2) = 6$, 即 M 运动了6秒;

综上所述: $t = 2$ 或6

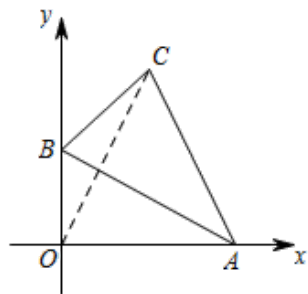
【标注】【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

二、面积之“割补法”

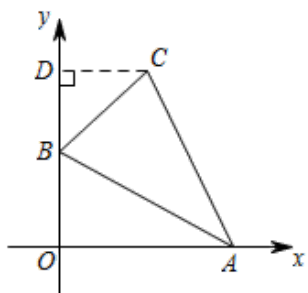
补形法

若三角形的边都不平行于坐标轴, 可采用补形法构造出有边平行于坐标轴的三角形或四边形后再求解.

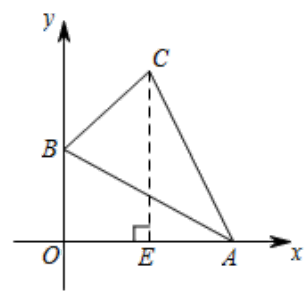
① 如图 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} - S_{\triangle OAB}$.



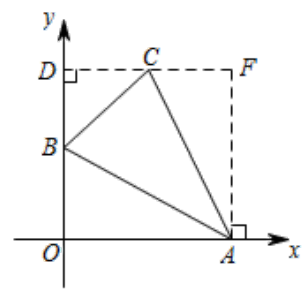
② 如图 $S_{\triangle ABC} = S_{\text{梯形}OACD} - S_{\triangle BCD} - S_{\triangle AOB}$.



③ 如图 $S_{\triangle ABC} = S_{\text{梯形}BOEC} + S_{\triangle ACE} - S_{\triangle AOB}$.



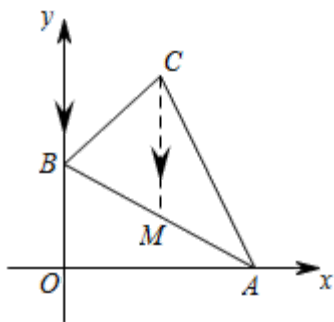
④ 如图 $S_{\triangle ABC} = S_{\text{矩形}OAFD} - S_{\triangle BCD} - S_{\triangle ACF} - S_{\triangle AOB}$.



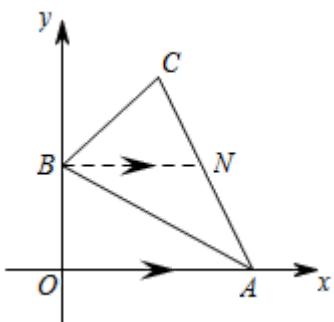
|| 分割法

通过作平行于坐标轴的直线将三角形分成左右两个三角形或上下两个三角形来求解面积 .

① 如图 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACM} + S_{\triangle BCM}$.

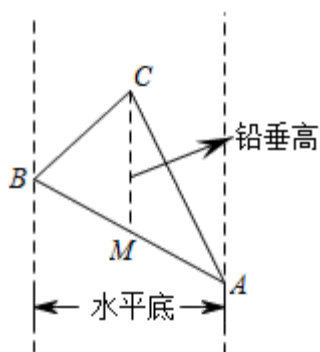


② 如图 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABN} + S_{\triangle BCN}$.



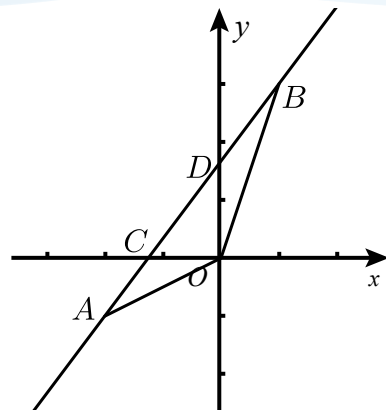
总结：

铅垂面积法： $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{水平底} \cdot \text{铅垂高}$ ，如图 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_A - x_B| \cdot |y_C - y_M|$.



|| 例题3

7. 如图，已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过 $A(-2, -1)$ ， $B(1, 3)$ 两点，并且交 x 轴于点 C ，交 y 轴于点 D .



(1) 求该一次函数的表达式 .

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积 .

【答案】 (1) $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

(2) $\frac{5}{2}$.

【解析】 (1) 把 $A(-2, -1)$, $B(1, 3)$ 代入 $y = kx + b$ 得 $\begin{cases} -2k + b = -1 \\ k + b = 3 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} .$$

所以一次函数的表达式为 $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

(2) 把 $x = 0$ 代入 $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$,

$$\text{得 } y = \frac{5}{3} ,$$

所以 D 点坐标为 $(0, \frac{5}{3})$,

所以 $\triangle AOB$ 的面积 $= S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOD}$

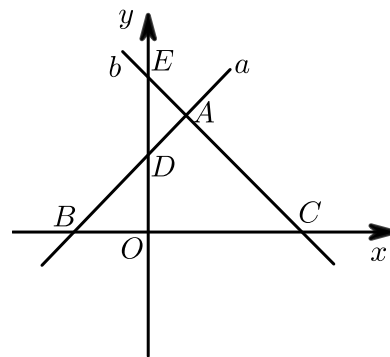
$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 1$$

$$= \frac{5}{2} .$$

【标注】【知识点】一次函数与面积

练习3

8. 直线 $a: y = x + 2$ 和直线 $b: y = -x + 4$ 相交于点 A , 分别与 x 轴相交于点 B 和点 C , 与 y 轴相交于点 D 和点 E .



(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积 .

(2) 求四边形 $ADOC$ 的面积 .

【答案】 (1) 9 .

(2) 7 .

【解析】 (1) 令 $y = x + 2 = 0$, 解得 : $x = -2$,

令 $x = 0$, 解得 : $x = 2$,

$\therefore B(-2, 0)$, $D(0, 2)$,

令 $y = -x + 4 = 0$, 解得 : $x = 4$,

令 $x = 0$, 解得 : $y = 4$,

$\therefore C(4, 0)$, $E(0, 4)$,

由 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$,

解得 : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$,

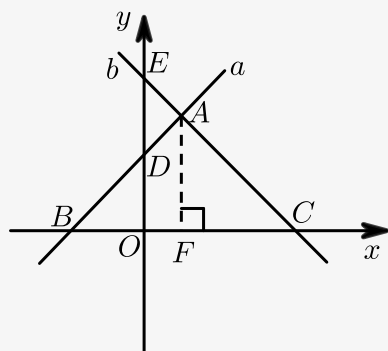
$\therefore A(1, 3)$,

$\therefore BC = 4 - (-2) = 6$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$.

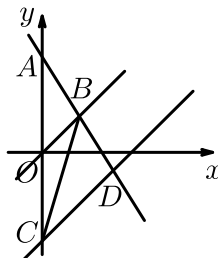
(2) 作 $AF \perp x$ 轴于点 F ,

$$S_{\text{四边形}ADOC} = S_{\text{梯形}DOFA} + S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2}(DO + AF) \cdot OE + \frac{1}{2}AF \cdot FC = \frac{1}{2}(2 + 3) \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 7$$



【标注】【知识点】一次函数与面积

9. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -x + b$ 的图象与正比例函数 $y = kx$ 的图象都经过点 $B(3, 1)$ 。



- (1) 求一次函数和正比例函数的表达式。
(2) 若直线 CD 与正比例函数 $y = kx$ 平行，且过点 $C(0, -4)$ ，与直线 AB 相交于点 D ，求点 D 的坐标。
(注：二直线平行， k 相等)
(3) 连接 CB ，求三角形 BCD 的面积。

【答案】(1) $y = -x + 4$ ， $y = \frac{1}{3}x$ 。

(2) $(6, -2)$ 。

(3) 12。

【解析】(1) 把 $B(3, 1)$ 分别代入 $y = -x + b$ 和 $y = kx$ 得 $1 = -3 + b$ ， $1 = 3k$ ，

$$\begin{aligned} \text{解得：} b &= 4, k = \frac{1}{3}, \\ \therefore y &= -x + 4, y = \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

(2) $\because$ 二直线平行， CD 经过 $C(0, -4)$ ，

$$\therefore \text{直线} CD \text{为} y = \frac{1}{3}x - 4,$$

$$\text{由题意得：} \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{1}{3}x - 4 \end{cases},$$

$$\text{解之得} \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 D 为 $(6, -2)$ 。

(3) 由 $y = \frac{1}{3}x + 4$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = 4$ ，

$$\therefore A(0, 4),$$

$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 - \frac{1}{2} \times 8 \times 3$$

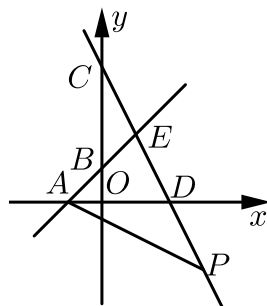
$$= 12.$$

【标注】【知识点】一次函数与面积

【教法备注】

下列练习需要利用铅垂法求解面积

10. 如图，直线 $AB: y = x + 1$ 与直线 $CD: y = -2x + 4$ 交于点 E 。



(1) 求 A 、 E 点坐标。

(2) 若 P 为直线 CD 上一点，当 $\triangle AEP$ 面积为6时，求 P 的坐标。

【答案】(1) $A(-1, 0)$ 、 $E(1, 2)$ 。

(2) $(3, -2)$ 或 $(-1, 6)$ 。

【解析】(1) 把 $y = 0$ 代入直线 $AB: y = x + 1$ 得 $x = -1$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ ，

联立直线 AB 与 CD 解析式得 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ，

所以 $E(1, 2)$ 。

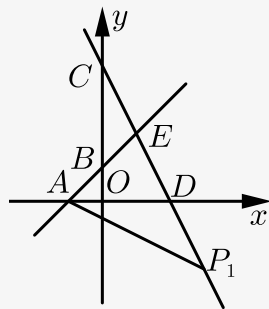
(2) $y = -2x + 4$ 中， $D(2, 0)$ ， $C(0, 4)$ 。

当 P 在直线 AE 下方时：

$$S_{\triangle APE} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} \times 3 \times (2 - y_P) = 6，$$

$\therefore y_P = -2$ ，

$\therefore P_1(3, -2)$ 。

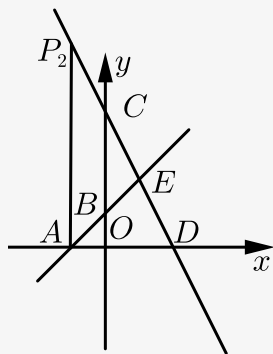


当 P 在直线 AE 上方时：

$$S_{\triangle APE} = S_{\triangle APD} - S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 3 \times (y_P - 2) = 6 ,$$

$$\therefore y_P = 6 ,$$

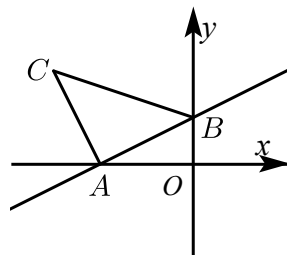
$$\therefore P_2(-1, 6) .$$



【标注】【知识点】一次函数与面积

练习3

11. 如图，直线 AB 和 x 轴， y 轴分别交于点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(0, 2)$ ，以线段 AB 为直角边在第二象限内作等腰直角三角形 ABC 。



- (1) 求直线 AB 的解析式。
- (2) 求点 C 的坐标。
- (3) 若在平面直角坐标系内存在点 $P(-2, a)$ ，使得 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，求 a 的值。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x + 2$ 。

(2) $C(-6, 4)$ 。

(3) $a = -4$ 或 $a = 6$ 。

【解析】(1) 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$ ，

代入点 $A(-4, 0)$ ， $B(0, 2)$ ，

$$\text{则有} \begin{cases} 0 = -4k + b \\ 2 = b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 。

(2) 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴，交 x 轴于点 D ，

由题意可知， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AC = AB$ ，

$$\begin{aligned} \because \angle CAB &= 90^\circ, \\ \therefore \angle CAD + \angle BAO &= 90^\circ, \\ \because \angle CAD + \angle DCA &= 90^\circ, \\ \therefore \angle BAO &= \angle DCA, \end{aligned}$$

在 $\triangle BAO$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAO = \angle ACD \\ \angle BOA = \angle ADC, \\ AB = CA \end{cases}$$

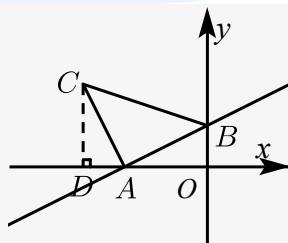
$$\therefore \triangle BAO \cong \triangle ACD (\text{AAS}),$$

$$\therefore CD = AO = 4,$$

$$AD = BO = 2,$$

$$\text{则 } OD = OA + AD = 4 + 2 = 6,$$

$$\therefore C(-6, 4).$$



(3) 如图, 点 P 在直线 $x = -2$ 上, 符合 $P(-2, a)$ 有两个坐标,

设为 P_1 和 P_2 , 直线 $x = -2$ 与直线 AB 交于点 D ,

$$\therefore D(-2, 1),$$

①点 P 在第二象限, 则 $P_1(-2, a)$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB^2 = \frac{1}{2} \cdot (OA^2 + OB^2) = \frac{1}{2} (4^2 + 2^2) = 10,$$

$$S_{\triangle ABP_1} = S_{\triangle AP_1D} + S_{\triangle BP_1D}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot P_1D \cdot |x_B - x_A|$$

$$= \frac{1}{2} (a - 1) \cdot |0 - (-4)|$$

$$= 2(a - 1),$$

$$2(a - 1) = 10,$$

$$a = 6,$$

$$\therefore P_1(-2, 6).$$

②点 P 在第三象限, $P_2(-2, a)$,

$$S_{\triangle ABC} = 10,$$

$$S_{\triangle ABP_2} = S_{\triangle ADP_2} + S_{\triangle BP_2D}$$

$$= \frac{1}{2} DP_2 \cdot |x_B - x_A|$$

$$= \frac{1}{2} (1 - a) \cdot 4$$

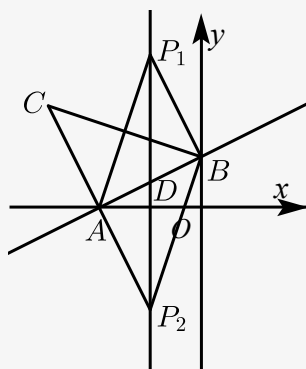
$$= 2(1 - a),$$

$$2(1 - a) = 10,$$

$$a = -4,$$

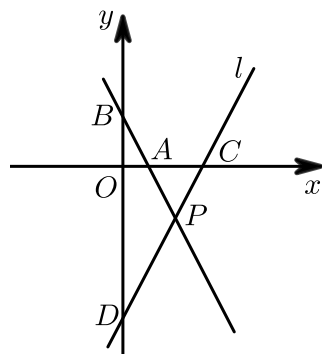
$$\therefore P_2(-2, -4).$$

综上所述, $a = -4$ 或 $a = 6$.



【标注】【知识点】一次函数与面积

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 2x - 6$ 交 x 轴于点 C ，交 y 轴于点 D ，点 A ， B 的坐标分别为 $(1, 0)$ ， $(0, 2)$ ，直线 AB 与直线 CD 相交于点 P 。



- (1) 直线 AB 的表达式为 _____ .
 (2) 点 P 的坐标为 _____ , 连接 OP , 则 $S_{\triangle APO} =$ _____ .
 (3) 若直线 CD 上存在一点 E , 使得 $\triangle BPE$ 的面积是 $\triangle APO$ 的面积4倍 , 求点 E 的坐标 .

【答案】(1) $y = -2x + 2$

(2) $(2, -2)$; 1

(3) $E(3, 0)$ 或 $E(1, -4)$.

【解析】(1) 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b(k \neq 0)$,

把 A 、 B 代入得 $\begin{cases} 0 = k + b \\ 2 = b \end{cases}$, 得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = 2 \end{cases}$, 则 $y = -2x + 2$.

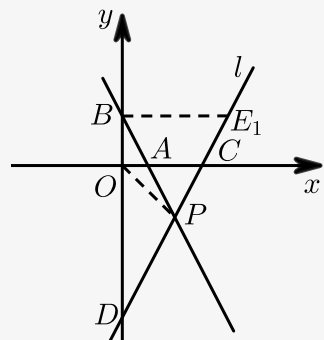
(2) 联立 AB 和 CD 的解析式： $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$,

得： $-2x + 2 = 2x - 6$, $4x = 8$, $x = 2$,

$\therefore y = 2 \times 2 - 6 = -2$,

$\therefore P(2, -2)$,

如图，连接 OP ,

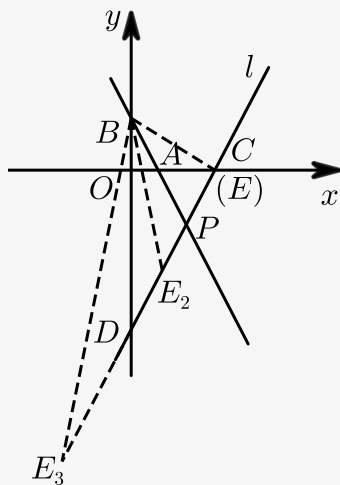


$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle APO} &= \frac{1}{2} \times AO \times |y_P| \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \end{aligned}$$

$$= 1 .$$

(3) 由 (2) 得 , $S_{\triangle APO} = 1$, 则 $S_{\triangle BPE} = 4S_{\triangle APO} = 4$,

①当E点在P点上方时 ,



$$S_{\triangle BPE} = S_{\triangle BDE} - S_{\triangle BPD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot |x_E - x_P| ,$$

$\because CD$ 与 BP 的解析式为 : $y = 2x - 6$ 和 $y = -2x + 2$,

$$\therefore D(0, -6) , B(0, 2) ,$$

$$\therefore BD = 8 ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8 \times |x_E - x_P| = 4 ,$$

$$|x_E - x_P| = 1 ,$$

$$\therefore x_P = 2 ,$$

$$\therefore x_E = 1 \text{ (舍去) 或 } x_E = 3 ,$$

$$y_E = 2 \times 3 - 6 = 0 ,$$

$$\therefore E(3, 0) ;$$

②当 E_2 点在线段 DP 上时 ,

$$\therefore S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2} \times BD \times |x_P|$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 2$$

$$= 8 ,$$

$$\therefore S_{\triangle BPE_2} = S_{\triangle BDP} - S_{\triangle BDE_2}$$

$$= \frac{1}{2} BD \times |x_P - x_{E_2}|$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times |x_P - x_{E_2}|$$

$$= 4 ,$$

$$\therefore x_P - x_{E_2} = 1 ,$$

$$x_{E_2} = 1 , y_{E_2} = -4 ,$$

$$\therefore E_2(1, -4) ;$$

③当 E 点在 D 点下方时，

$$S_{\triangle BPE_3} > S_{\triangle BPD} = 4 ,$$

此时 E 点不存在 .

综上： $E(3, 0)$ 或 $E(1, -4)$.

【标注】【知识点】一次函数与面积